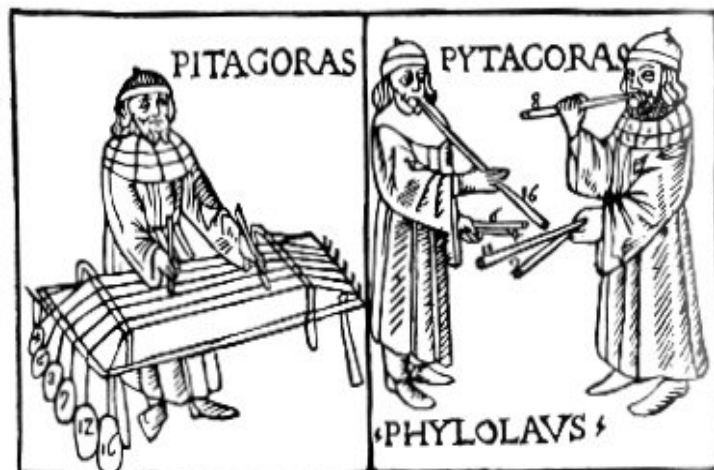


Was Musik mit Mathematik verbindet

Beispiel: das musikalische Intervall

Bild 12

Pythagoras als Musiker,
Holzschnitt aus »Theorica
Musicae« von F. Gafarius,
Milano (Mailand) 1492. Die
Pythagoreer beschäftigten
sich mit der Akus



Adresse:

von Tscherner Lena

Abgabedatum:

Zwischenversion, 31.03.2009

Endversion, 12.05.2009

Dozent:

Walser Hans

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die Geschichte von Mathematik und Musik	2
1.1 Entstehung der Mathematik	2
1.2 Entstehung der Musik	3
1.3 Musik als Wissenschaft	4
2 Pythagoras und die Intervalle	5
2.1 Die Biografie von Pythagoras	5
2.2 Die pythagoreischen Betrachtungen der Musik	8
2.3 Intervalle in der Mathematik	10
2.4 Intervalle in der Musik	11
2.5 Intervalle in der Musik und deren Verhältnisse	12
3 Von den Naturtönen zur temperierten Stimmung	15
3.1 Naturtöne	15
3.2 Berechnung temperierter Stimmung	16
Quellenverzeichnis	17

Einleitung

Wie dem Titel zu entnehmen ist, habe ich versucht, eine Verbindung zwischen Musik und Mathematik zu finden und aufzuzeigen, wobei ich den Schwerpunkt auf die Musik lege.

Im ersten Teil beschreibe ich, wie die zwei Wissenschaften unabhängig voneinander ihren Ursprung haben. In einem nächsten Schritt zeige ich auf, wie die Musik durch das Wirken des Philosophen Pythagoras der Wissenschaft der Mathematik untergeordnet wurde. Hier liegt der Schwerpunkt meiner Arbeit: Pythagoras hat sich mit den Intervallen und deren Frequenzverhältnissen beschäftigt, worauf ich näher eingehen und die musikalischen Begriffe erklären werde. Um Missverständnisse mit diesem Synonym (Intervall in der Musik) zu vermeiden, habe ich eine kurze Erklärung für das Intervall in der Mathematik beigefügt.

Seitens der Erziehungswissenschaften habe ich wiederholt gehört, dass es wichtig ist, den Schülerinnen und Schülern den stofflichen Inhalt mit verschiedenen Methoden und Wegen zu vermitteln. Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen die Intervalle, bzw. wie Zweiklänge berechnet werden können, und dass es eine Gesetzmässigkeit für deren Abstände gibt. Mit dieser Arbeit fand ich einen Weg, wie ich später als Musiklehrerin im Zusammenhang mit der Akkordlehre und den Naturtönen einen Bezug zur Mathematik herstellen kann.

Die Quellen, die ich für meine Texte benutzt habe, sind jeweils am Ende des Unterkapitels aufgeführt. Bei den Bildern findet sich die entsprechende Quelle als Fussnote.

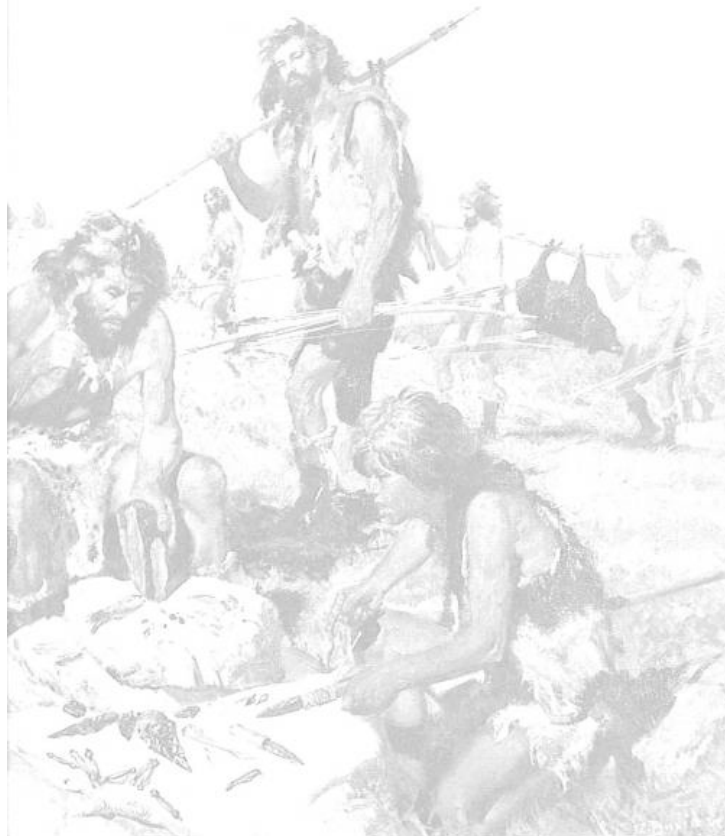
1 Die Geschichte von Mathematik und Musik

Beide Disziplinen – Mathematik und Musik – haben laut S. Brüning [2] seit jeher eine bedeutende Rolle in der Wissenschaftsgeschichte gespielt, jedoch sei eine Datierung ihrer Entstehung nicht genau festzusetzen.

In diesem Kapitel arbeite ich mit Zitaten aus der Fachliteratur (Ergänzungen von mir in kursiver Schrift). Ich zeige damit auf, wie Mathematik und Musik unabhängig von einander entstanden sind, wie sie später zusammengefunden haben und dies über längere Zeit blieben, bis sie als zwei eigenständige Wissenschaften auseinander gegangen sind.

1.1 Entstehung der Mathematik

Von den Anfängen der Mathematik weiss man laut S.Brüning [2] aufgrund fehlender Quellen nur sehr wenig. Es gilt jedoch als gesichert, dass die Entwicklung des Zahlenbegriffs und die Ausbildung erster geometrischer Formen in die Epoche der Steinzeit fallen.



1

¹ <http://www.outdoor-workshop.de/images/steinzeit1.jpg> (5.03.09)

1.2 Entstehung der Musik

Die Ursprünge der Musik festzusetzen ist laut S. Brüning [2] ebenso schwierig wie in der Mathematik.

Jedoch darf man annehmen - so J. Rademacher [3] - dass das Singen eine andere Form des Sprechens ist und damit auch geeignet erscheint, Kommunikation zwischen zwei Individuen oder innerhalb einer Gruppe zu ermöglichen.

Im Altertum (3000 v. Chr. – 6.Jh.) wurden die Anfänge der Musik nach S. Brüning [2] durch Mythen erklärt. „Man glaubte, die Musik sei göttlicher Natur“.

Bei J. Rademacher [3] lesen wir: „In aussereuropäischen Kulturen dient die Musik noch heute oft dazu, mit Göttern oder Geistern in Kontakt zu treten oder, was damit eng verbunden ist, die Geschichte und Tradition der jeweiligen Gruppe weiterzugeben. Die Musik wird dadurch zu einer religiösen Handlung und hat somit eine zentrale Stellung innerhalb einer Gesellschaft.“

„Andere Theorien nehmen“, laut S.Brüning [2], die sich dabei auf Adler bezieht, „die Imitation von Tierlauten als Ursprung der Musik an. Im weiteren Verlauf der Jahrhunderte gab es immer wieder Erklärungsversuche bezüglich ihres Ursprungs seitens der Naturwissenschaften. Charles Darwin suchte den Ursprung in den Vogelstimmen, die er als Mittel zur Äusserung der sexuellen Triebe auffasste. Dies versuchte er auf den Menschen und sein Verhalten zu übertragen, indem er annahm, dass ‚der Urmensch seiner Erregung in Tönen Ausdruck verliehen habe‘.“



2

² <http://www.nature-rings.de/media/product/4/nachtigall-hires.jpg> (12.03.09)

Zur Bedeutung der Musik schreibt J. Rademacher: „In Europa hat sich die Bedeutung der Musik im Lauf der Zeit erheblich gewandelt. Die metaphysische Komponente tritt fast völlig in den Hintergrund. Die Idee, dass alles auf einer Ordnung beruhe, die man in der Musik abbilden und nachvollziehen kann, wurde zum eigentlichen Sinn der Musik erklärt und wird im Grunde bis heute nicht in Frage gestellt.“... „In vielen Kulturen der Welt macht man den Unterschied zwischen dem persönlichen Musizieren zur Befriedigung eigener emotionaler Bedürfnisse und der institutionalisierten Musikausübung, die mit einer Spezialisierung und Professionalisierung der Musik einhergeht.“

Quellen zu Kapitel 1.1: (vgl. [2], S.89)

Quellen zu Kapitel 1.2: (vgl. [2], S.92, 93, [3] S.8, 9, [1])

1.3 Musik als Wissenschaft

Zur Entstehung der Musik als Wissenschaft schreibt S. Brüning [2] „Für die Musik muss zwischen ihrer Ausübung und ihrer Analyse (Musik als Wissenschaft; *musica scientia*) unterschieden werden. Die Anfänge der Musikausübung liegen (*wie oben besprochen*) weit vor der Musik als Wissenschaft. Die Musikwissenschaft hatte ihre Geburt im 5. Jahrhundert vor Christus durch die Pythagoreer. Für die mittelalterlichen Gelehrten gilt Pythagoras (*um 570 v. Chr.*) als Begründer der Musik als Wissenschaft.“

„Seit der klassischen Antike (*1100 v. Chr. – 500*) stehen Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie – zusammengefasst als *Quadrivium* – als mathematische Wissenschaft im Zentrum der wissenschaftlichen Beobachtungen und verlieren bis zum Mittelalter (*6. bis 15. Jh.*) ihren Zusammenhalt nicht.“

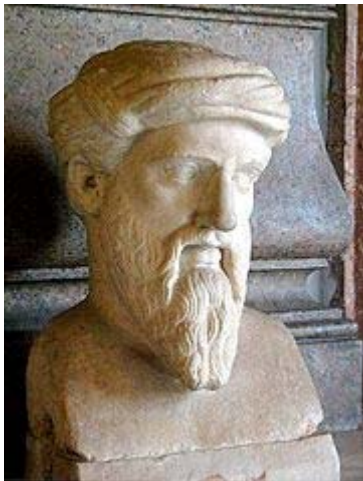
„Gegen Ende des 18. Jahrhunderts (*Zeit der Klassik 1750-1830 mit den Komponisten Haydn, Mozart und Beethoven*) wurde die Musik aus dem mathematisch-physikalischen Wissenschaftsgebiet gestrichen und als eigenständige Kunst klassifiziert.“

Quellen zu Kapitel 1.3: (vgl. [2], S.93, [1])

2 Pythagoras und die Intervalle

Da Pythagoras für den Begründer der Musik als Wissenschaft steht, will ich in diesem Kapitel seine Biografie und sein Wirken als Musikwissenschaftler näher betrachten und erklären. In diesem Zusammenhang treffen wir die Intervalle, auf die ich näher eingehen möchte. Intervalle gibt es sowohl in der Musik wie auch in der Mathematik. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt bei der Musikwissenschaft, ich mache nur einen kleinen Exkurs zu den Intervallen in der Mathematik.

2.1 Die Biografie von Pythagoras



Büste des Pythagoras;
Kapitolinische Museen, Rom³

Die Daten des Lebensweges von Pythagoras sind wenig gesichert, denn aus seiner Zeit existieren keine Dokumente. Selbst das Bekannte ist durchzogen von Legenden, und es ist nicht gesichert, was davon der Wahrheit entspricht. Man weiß, dass er in einer halb-religiösen und halb-wissenschaftlichen Gesellschaft lebte. Für seine Schüler galt er als göttlich, was u. a. zur Folge hatte, dass Pythagoras uns heute als eine mehr oder weniger mysteriöse Figur erscheint.

Pythagoras war ein griechischer Philosoph und Mathematiker. Er wurde um 570 v. Chr. auf der griechischen, der ionischen Küste Kleinasiens vorgelagerten Insel Samos geboren.

³ <http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras> (12.03.09)



4

Seine Mutter Pythais war eine Eingeborene aus Samos. Sie lernte den späteren Vater von Pythagoras, Mnesarchus - ein Großhändler aus Griechenland - kennen, als auf Samos eine Hungersnot herrschte. Mnesarchus brachte Korn nach Samos, und aus Dankbarkeit dafür wurde er zum Ehrenbürger ernannt.

Pythagoras verbrachte seine Kindheit mit seinen zwei Brüdern auf Samos, reiste aber auch mit seinem Vater. Es heisst, er war ein gut erzogenes Kind, er lernte die Kunst des Dichtens, die Leier zu spielen und er las Homers Werke.

Seine Lehrer waren allesamt Philosophen, die sein junges Leben maßgeblich beeinflussten. Als Pythagoras' wichtigster Lehrer gilt Pherekydes.

Mit etwa achtzehn Jahren flüchtete Pythagoras zu den Naturphilosophen Anaximandros und Thales nach Milet, weil es in seiner Heimat auf Samos zu einem Aufstand und Machtwechsel gekommen war.

Die Polykraten hatten die Macht übernommen, und es heißt, dass sie mit der Gesellschaft von Pythagoras verfeindet gewesen waren.

⁴ http://www.info-regenten.de/pyt_ref.htm (19.3.09)

Später entschloß er sich nach Ägypten zu segeln, um die Priester in Memphis und Diospolis (weiter südlich von Memphis) aufzusuchen, weil diese auch die Philosophie von Thales lehrten. Die Seefahrer, mit denen er unterwegs war, hielten Pythagoras für ein göttliches Wesen, da die Überfahrt wider Erwarten ruhig verlief. In Ägypten ließ er sich mit Fleiß über jede Lehre unterrichten und befasste sich dort 22 Jahre lang mit Sternenkunde, Geometrie und der Einweihung in alle Göttermysterien.

Doch dann wurde er von Kriegerern des persischen Königs Cambyses II gefangen genommen und nach Babylon gebracht. Dort wurde er von Magiern in die Götterverehrung, in die Zahlenlehre und in die Musik eingeführt.

520 v. Chr. kehrte Pythagoras in seine Heimat Samos zurück. Die Polykraten waren getötet worden und der persische König hatte Gerüchten nach Selbstmord begangen, so dass Pythagoras eine Rückkehr nicht schwer fiel. Aber diese Rückkehr sollte nicht lange dauern, denn zwei Jahre später verließ er die Insel wieder und ging nach Kroton, heute Crotona, in Italien.

In Kroton soll er die Schule der Pythagoreer gegründet haben, deren Anhänger sich auf die innere Reinheit und auf das ethisch-moralische Verhalten konzentrierten. Dabei galt es unter anderem, die Eltern zu achten sowie den Geist zu bilden und Gerechtigkeit zu üben. In seiner Schule als religiöse Gemeinschaft genoss Pythagoras eine große Anerkennung bei seinen Schülern.

Die innere Reinheit wurde erreicht durch wenig Schlaf, wenig Essen und viel Schweigen. Männer und Frauen galten als gleichberechtigt, und es gab in dieser Gemeinschaft eine Art Gemeinschaftseigentum. Der direkte Weg zu Gott war für Pythagoras mit der geistigen Tätigkeit verbunden.

Seine Schüler beschäftigten sich mit Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musikwissenschaft. Beeinflusst wurden Pythagoras' Vorstellungen von der babylonischen Lehre. Für ihn war die Himmelsordnung begründet durch die Macht der Zahlen. Pythagoras entdeckte die Verbindung von Musik und Mathematik, er wurde zum Begründer der mathematischen Analyse der Musik, wobei Musik zu den engsten Vorlieben der Griechen gehörte.

Die nach ihm benannten Pythagoreer blieben auch nach seinem Tod in Metapont (ca. 570 - 510 v. Chr.) kulturgeschichtlich bedeutsam.

Quellen zu Kapitel 2.1: http://www.whoswho.de/templ/te_bio.php?PID=923&RID=1 (19.03.09), <http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras> (12.3.09), <http://www.satzdespythagoras.de/biografie.html> (19.3.09), http://www.info-regenten.de/pyt_ref.htm (19.3.09)

2.2 Die pythagoreischen Betrachtungen der Musik

Trotz der ungeheuren persönlichen Autorität des Pythagoras war der frühe wie auch der spätere Pythagoreismus keine verbindlich fixierte, in sich geschlossene und detailliert ausgearbeitete dogmatische Lehre. Es handelte sich eher um eine Weltbetrachtung, die für unterschiedliche Ansätze Spielraum ließ.

Die Pythagoreer hatten die Grundüberzeugung, dass die gesamte erkennbare Welt auf der Basis bestimmter Zahlen und Zahlenverhältnisse aufgebaut ist und damit eine harmonisch gestaltete Einheit bildet. Dabei schenkten die Pythagoreer den musikalischen Gesetzmäßigkeiten besondere Aufmerksamkeit: Die Musik war derjenige Bereich, in dem die Grundidee einer auf Zahlenverhältnissen beruhenden Harmonie am einfachsten demonstrierbar war.

Wie schon in Kapitel 1 erwähnt, wurde Pythagoras in der Antike allgemein als Begründer der mathematischen Analyse der Musik angesehen. Platon bezeichnete die Pythagoreer als Urheber der musikalischen Zahlenlehre, sein Schüler Xenokrates schrieb die entscheidende Entdeckung Pythagoras selbst zu.

Bei der mathematischen Analyse der Musik ging es um die Darstellung der harmonischen Intervalle durch einfache Zahlenverhältnisse.

Der Tonvorrat wurde mit analytischen Methoden strukturiert. Es entstand eine Vorstellung von Musiktheorie, wie es sie zuvor noch nicht gegeben hatte. Die Pythagoreer lenkten den Blick bzw. das Ohr auf bestimmte Tonpaare (Intervalle), von denen sie behaupteten, dass einige von ihnen gut zueinander passten. Tonpaare, die gut zueinander passen, wurden als konsonant bezeichnet.

Dazu kommt, dass diese Tonpaare einfache Zahlenverhältnisse hatten, deren Zustandekommen im Kapitel 2.5 aufgeführt ist.

Zeitgleich entwickelte sich in der Mathematik die Proportionslehre (Bruchrechnen). Diese ist der Grundstein auf welchem die Analyse der Musik mit Zahlenverhältnissen überhaupt möglich wurde.



Im Mittelalter stellte man sich den griechischen Musiktheoretiker Pythagoras etwa so vor. Ob er wirklich mit gefüllten Gläsern experimentierte, um die Zahlenverhältnisse in der Musik zu beweisen, ist nicht sicher, doch gut vorstellbar.



Ein Saiteninstrument hat Pythagoras allerdings sicher benutzt, um die Intervalle zu berechnen. Das so genannte Monochord, wird im Kapitel 2.5 vorgestellt.

Pythagoras benützte ein Monochord und sein Gehör zur Intervallbestimmung. Der griechische Philosoph Platon (ca.428 - 347 v. Chr.), der eine rein spekulative, aus allgemeinen Prinzipien abgeleitete Musiktheorie forderte und die Sinneserfahrung durch das Gehör für unzureichend hielt, kritisierte die Pythagoreer wegen ihres empirischen, d.h. aus der Erfahrung und dem Experiment entnommenen, Vorgehens.

⁵ <http://www.philophony.com/sensprop/pics/pythag.jpg> (26.03.09)

Die Musik eignete sich für die Pythagoreer zur Abstützung der These einer universalen Harmonie und der Verflochtenheit aller Teile des Kosmos. Durch die Idee der klingenden Himmelsharmonie war die Musik mit der Astronomie verbunden, durch die Messbarkeit der Tonhöhen mit der Mathematik, durch ihre Wirkung auf das Gemüt mit der Seelenkunde, der ethischen Erziehung und der Heilkunst. Die Pythagoreer befassten sich mit den unterschiedlichen Wirkungen verschiedener Instrumente und Tonarten auf das menschliche Gemüt. Den Legenden zufolge setzte Pythagoras ausgewählte Musik gezielt zur Beeinflussung unerwünschter Affekte und zu Heilungszwecken ein, er betrieb also eine Art Musiktherapie.

Quellen zu Kapitel 2.2: (vgl. [2], S.93,94, <http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoreer> (19.03.09), [3], S.9, <http://de.wikipedia.org/wiki/Platon> (28.3.09))

2.3 Intervalle in der Mathematik

Ein Intervall (von lat. Intervallum = ‚Zwischenraum‘) ist eine ‚zusammenhängende‘ Teilmenge einer geordneten Menge.

Dabei bedeutet ‚zusammenhängend‘: Wenn zwei Objekte in der Teilmenge enthalten sind, dann sind auch alle Objekte, die dazwischen liegen, darin enthalten. In der Regel betrachtet man die Menge der reellen Zahlen, manchmal auch die der rationalen, der ganzen oder der natürlichen Zahlen.

Ein Intervall kann beidseitig beschränkt sein oder einseitig unbeschränkt. Es ist durch seine untere und seine obere Intervallgrenze eindeutig bestimmt, wenn zusätzlich angegeben wird, ob diese Grenzen im Intervall enthalten sind. Ein Intervall heißt ‚abgeschlossen‘, wenn es beide Grenzen enthält, und ‚offen‘, wenn die beiden Grenzen nicht enthalten sind. Ein Intervall heißt ‚halboffen‘, wenn es genau eine der beiden Intervallgrenzen enthält. In mancher Literatur werden beschränkte Intervalle auch als ‚eigentlich‘, unbeschränkte als ‚uneigentlich‘ bezeichnet.

Es gibt zwei verschiedene häufig verwendete Intervallschreibweisen. Bei einer der beiden verwendet man für ein offenes Ende runde und für ein geschlossenes Ende eckige Klammern. Im Folgenden wird diese eine Schreibweise dargestellt und der Mengenschreibweise gegenübergestellt.

Abgeschlossenes Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Das Intervall enthält sowohl a als auch b. Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall heisst auch kompaktes Intervall.

Offenes Intervall

$$(a, b) =]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Das Intervall enthält weder a noch b.

Halboffenes (genauer rechtsoffenes) Intervall

$$[a, b) = [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Das Intervall enthält a, aber nicht b.

Halboffenes (genauer linksoffenes) Intervall

$$(a, b] =]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Das Intervall enthält nicht a, wohl aber b.

\mathbb{R} steht für die Menge der reellen Zahlen. Teilmengen davon sind:

- Rationale Zahlen \mathbb{Q} = Bruchzahlen der Form ganze Zahl/natürliche Zahl
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Natürliche Zahlen \mathbb{N} (ohne 0) = $\{1, 2, 3, \dots\}$
- Irrationale Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = die Menge aller Elemente von \mathbb{R} , die nicht in \mathbb{Q} liegen. Diese lassen sich wiederum in algebraische Zahlen und transzendente Zahlen unterteilen.

Quelle zu Kapitel 2.3: [http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_(Mathematik)) (5.03.09),

http://de.wikipedia.org/wiki/Reelle_Zahlen (5.03.09)

2.4 Intervalle in der Musik

Unter einem Intervall versteht man heute in der Musik den Höhenunterschied zwischen zwei gleichzeitig oder nacheinander erklingenden Tönen. Der Begriff bezeichnet demnach eine Grösse, die als Tonabstand oder Tondifferenz in Tonsystemen auftritt. Als natürliche Einheit dieser Grösse kann man die Oktave

ansehen; in der Praxis werden Intervalle eher in von der Oktave abgeleitete Einheiten wie Halbton oder Cent beschrieben.

Mit Melodieanfängen lassen sich Intervalle leicht ‚ins Ohr rufen‘.

Die ersten zwei unterstrichenen Silben, gesungen als Töne des genannten Liedes, stellen je ein Intervall dar:

<u>Name des Intervalls</u>	<u>Name des zugehörigen Liedanfangs</u>
Eine Quarte:	<u>Oh</u> <u>T</u> annenbaum
Eine Quinte:	<u>Morgen</u> <u>kommt</u> der Weihnachtsmann
Eine Oktave:	<u>Some-where</u> over the rainbow

Diese drei Intervalle sind die drei konsonanten Intervalle, mit welchen sich Pythagoras zentral beschäftigt hat. Das Wort Konsonanz (v. lat. con ‚zusammen‘ und sonare ‚klingen‘) ist in der Musik die Bezeichnung für einen Wohl- oder Zusammenklang, d.h. für Intervalle und Akkorde, die als in sich ruhend und nicht ‚auflösungsbedürftig‘ empfunden werden.

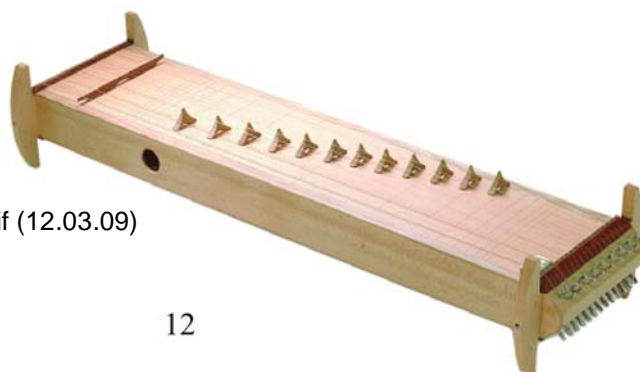
Quellen zu Kapitel 2.4: [http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_\(Musik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_(Musik)) (5.03.09), S. Brüning S.94

2.5 Intervalle in der Musik und deren Verhältnisse

Nun betrachten wir im Näheren die pythagoreische Musiklehre und damit einen Teil der Proportionslehre, die sich zeitgleich entwickelt hat.

Ausgangspunkt der pythagoreischen Betrachtungen ist die Zuordnung von Proportionen zu den Grundintervallen. Durch das Spannen einer Saite auf dem Monochord und durch das Abgreifen bestimmter Abschnitte entstehen Proportionen von Saitenlängen, welche die nach Pythagoras konsonanten und somit gebräuchlichen Intervalle darstellen.

Monochord⁶



⁶ <http://www.monochor.de/mono2.gif> (12.03.09)

Das Monochord wird heute als Lehrinstrument im Physik- und Musikunterricht verwendet. Die Schüler und Schülerinnen lernen die Intervalle und deren Frequenzverhältnisse mittels der Saiteneinteilungen zu bestimmen:

Über einen Resonanzkasten ist eine Saite gespannt, auf der sich ein beweglicher Steg befindet, so dass die Länge der Saite verändert werden kann. Auch im Mittelalter wurde das Monochord zur Demonstration der akustischen Gesetze verwendet. Später vermehrte man die Saite auf zwei und drei, um die Intervalle hörbar zu machen.

Wie berechnet man die konsonanten Intervalle auf dem Monochord: Die erklingende Tonhöhe hängt von der Saitenlänge ab. Zupft man an einer nicht unterteilten Saite, erklingt der Grundton (das Ausgangsmaterial). Unterteilt man eine andere Saite in zwei gleich grosse Teile, erklingt die Oktave (1:2) zum Grundton.

Wird eine Saite bei einem Drittel abgesteckt, und zupft man beim längeren Teil der Saite, erklingt die Quinte (2:3) zum Grundton. Wird die Saite bei einem Viertel abgesteckt und man zupft beim längeren Teil der Saite, erklingt die Quarte (3:4) zum Grundton.

Intervalle verbinden Musik und Mathematik miteinander: Dank der Mathematik kann man mit den Intervallen rechnerische Spiele durchführen, die uns bis zur so genannten temperierten Stimmung (s. Kapitel 3) bringen. Will man zwei Intervallschritte ‚addieren‘, so ergibt sich für das resultierende Intervall als Frequenzverhältnis das Produkt der Frequenzverhältnisse der Einzelintervalle. Eine ‚Subtraktion‘ von zwei Intervallen erfordert dementsprechend eine Division der Frequenzverhältnisse.

Beispiel

Eine Quinte und eine Quarte ergeben zusammen eine Oktave:

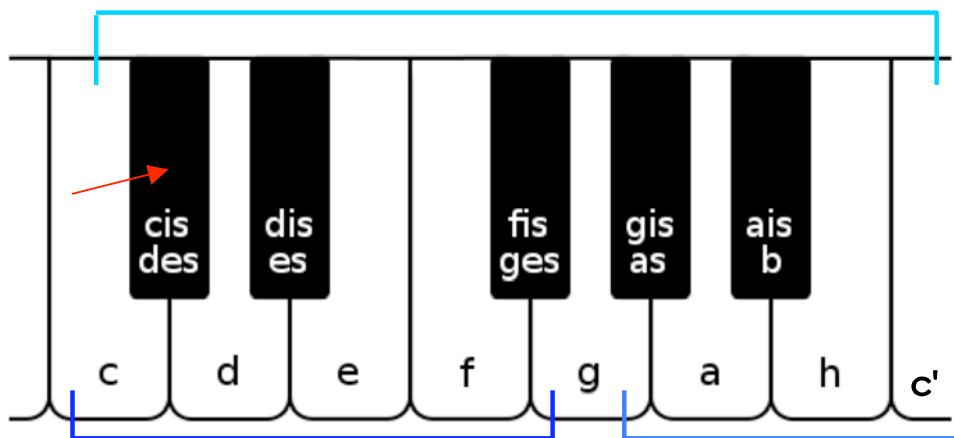
$$(2:3) \text{ mal } (3:4) = (1:2)$$

$$\text{Quinte} + \text{Quarte} = \text{Oktave}$$

Hier mache ich die Intervalle auf den Klaviertasten sichtbar. Dieses Beispiel entspricht allerdings nicht der ursprünglichen Berechnung der Intervalle auf dem Monochord, da heute ein Klavier temperiert gestimmt ist und somit leicht abweichende Frequenzverhältnisse aufweist. Aber die Klaviertasten eignen sich besonders, um sich damit Intervallabstände vorstellen zu können.

7 Halbtonschritte + 5 Halbtonschritte = 12 Halbtonschritte

Quinte + Quarte = Oktave



7

→ ein Halbtonschritt

— eine Quinte

— eine Quarte

— eine Oktave

Quellen zu Kapitel 2.5: S.Brüning S.94, <http://www.sphinx-suche.de/antike15/Monochord.htm>
(12.03.09), Aufgabenblätter von F. Meury

⁷[http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Klaviatur_\(Tasten\).svg&filetimestamp=200711082049](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Klaviatur_(Tasten).svg&filetimestamp=200711082049)
25 (12.03.09)

3 Von den Naturtönen zur temperierten Stimmung

Das Musizieren auf dem Monochord zeigt, dass musikalische Intervalle durch Zahlenverhältnisse darstellbar sind. Dies trifft nach heutigen Kenntnissen nicht nur für die Grundintervalle, sondern ebenso für jedes weitere Intervall zu.

3.1 Naturtöne

Der Begriff Naturtöne steht für diejenigen Töne eines Blasinstruments, die ohne Verwendung von Klappen, Ventilen, Löchern oder Zügen, sondern nur durch die Art des Anblasens erzeugt werden können. Die Naturtöne werden von den Eigenschwingungen der im Blasinstrument eingeschlossenen Luftsäule hervorgerufen.

Das unten abgebildete Notenbeispiel zeigt einige dieser Naturtöne und die entsprechenden reinen Intervalle, wie sie in einer Obertonreihe abgelesen werden können:

Beginn der Naturtonreihe auf C:

C c g c' e' g' b' c'' d'' e'' fis'' g'' a'' b'' h'' c''

Oktav Quint Quart gr.Terz kl.Terz großer kleiner diatonischer
 1 : 2 2 : 3 3 : 4 4 : 5 5 : 6 8 : 9 9 : 10 15 : 16
 große Sext kleine Sext kleine Septim große Septim
 3 : 5 5 : 8 9 : 16 8 : 15

* Diese Tonhöhen sind aufgrund ihrer Schwingungsverhältnisse für Berechnungen in diesem Beispiel nicht weiter verwendbar, sie geben nur die ungefähre Tonhöhe an.

Im Kapitel 2.5 habe ich aufgezeigt, wie Intervalle ‚addiert‘ und ‚subtrahiert‘ werden können. Mit dieser Anwendung und den im oben abgebildeten Notenbeispiel angegebenen Frequenzverhältnissen zu den Naturtönen, können wir sämtliche Intervalle ableiten: Ein mathematisch besonders interessantes Intervall ist die ‚verminderte‘ Quinte (Liedanfang Ma-ri-a aus West Side Story), also eine Quinte minus einen Halbton: $(2:3)/(15:16) = 32:45 \approx 0.711$. Das ‚fast‘ gleiche Ergebnis, nämlich $(8:9) \cdot (8:9) \cdot (8:9) = 512:729 \approx 0.702$, ergeben drei grosse Ganztöne, weshalb dieses Intervall (die verminderte Quinte) auch ‚Tritonus‘ genannt wird. Der Tritonus wird als die ‚Mitte‘ der Oktave betrachtet, da zweimal eine verminderte Quinte ‚fast‘ eine Oktave ergibt: $(32:45) \cdot (32:45) = 1024:2025 \approx 1:2$.

Quellen zu Kapitel 3.1: (vgl. [2],S.99, Aufgabenblätter von F. Meury)

3.2 Berechnung temperierter Stimmung

Das Problem mit den reinen Intervallen ist dieses ‚fast‘ (s. Kapitel 3.1). Die reinen Intervalle ergeben kein Tonsystem, das in der Oktave genau aufgeht. Daran grübelten Musiker und Mathematiker seit Pythagoras, jedoch erst zu Beginn des 17. Jahrhunderts fanden sie die radikalste Lösung durch die so genannte gleichschwebend temperierte Stimmung. Dabei wird die Oktave in ‚zwölf gleich klingende‘, das heisst dasselbe Frequenzverhältnis aufweisende, Halbtöne eingeteilt.

Dieses Frequenzverhältnis entspricht $1: \sqrt[12]{2}$. Alle Ganztöne sind gleich, nämlich $1: \sqrt[2]{2}$, und somit ist die Mitte der Oktave, d. h. der Tritonus, genau $(1: \sqrt[6]{2}) \cdot (1: \sqrt[6]{2}) = 1: \sqrt{2} \approx 0.707$.

Quelle zu Kapitel 3.2: Aufgabenblätter von F. Meury

Quellenverzeichnis

Fachliteratur:

- [1] Der grosse Brockhaus in einem Band, Leipzig, F.A. Brockhaus, 2.Auflage 2005
- [2] Brüning Sabine, Musik verstehen durch Mathematik, Essen, DIE BLAUE EULE, 2003
- [3] Rademacher Johannes, Musik, Schnellkurs, Köln, DuMont Buchverlag, 7.Auflage 2007

Internetseiten:

- <http://www.fh-lueneburg.de/mathe-lehramt/geschichte/griechen/pyth-musik.jpg> (5.03.09)
- <http://www.outdoor-workshop.de/images/steinzeit1.jpg> (5.03.09)
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_(Mathematik)) (5.03.09)
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_\(Musik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_(Musik)) (5.03.09)
- <http://www.monochor.de/mono2.gif> (12.03.09)
- <http://www.nature-rings.de/media/product/4/nachtigall-hires.jpg> (12.03.09)
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras> (12.03.09)
- [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Klaviatur_\(Tasten\).svg&filetimestamp=20071108204925](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Klaviatur_(Tasten).svg&filetimestamp=20071108204925) (12.03.09)
- http://www.info-regenten.de/pyt_ref.htm (19.03.09)
- <http://www.satzdespythagoras.de/biografie.html> (19.03.09)
- http://www.whoswho.de/templ/te_bio.php?PID=923&RID=1 (19.03.09)
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoreer> (19.03.09)
- <http://www.philophony.com/sensprop/pics/pythag.jpg> (26.03.09)
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Platon> (28.3.09)

sonstiges:

- Arbeitsblätter von Mathematik und Physiklehrer Fredi Meury, für das Gymnasium Liestal.